CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 3 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Etant donnés des réels b, c, d on rappelle que

1 L'ensemble S des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant :
" $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0$ " est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension 2.

2 Si l'équation $r^2 + br + c = 0$ a une racine double r_1 alors
$S = \{u : \mathbb{N} \to \mathbb{C},\ \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha n + \beta)r_1^n\}$.

3 Si l'équation $r^2 + br + c = 0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors
$S = \{u : \mathbb{N} \to \mathbb{C},\ \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n)\}$.

4 L'ensemble S_d des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant
"$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} + bv_n + cv_{n-1} = d$" est égal à $\{v = u + w, u \in S\}$, w solution particulière $w \in S_d$.

Dans ce problème, on étudie des systèmes linéaires AX = B de matrice carrée d'ordre n ($n \geq 2$).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et une matrice colonne.

Tournez la page S.V.P.

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$ $\quad {}^t y = [y_1 \dots y_n]$ $\quad \|y\|_2 = \sqrt{{}^t y.y} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$ est la norme euclidienne de y dans $\mathbb{R}^n$.

On pose $\|y\|_\infty = \text{Max}(|y_1|,\dots,|y_n|)$

La partie I étudie des propriétés de la matrice A.
La partie II propose deux méthodes de résolution du système AX = B et les compare sur un exemple.
La partie III donne une interprétation du système étudié en termes de statique et étudie la stabilité de l'équilibre correspondant.
Ces trois parties sont indépendantes.

PARTIE I

1. Produit scalaire associé à A

Soit $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit $y_0 = y_{n+1} = 0$.

Montrer que pour i variant de 1 à n, $(Ay)_i = - y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}$ et que ${}^t y\, A\, y = \sum_{k=0}^{n} (y_{k+1} - y_k)^2$.

En déduire que l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(X,Y) \mapsto {}^t Y AX$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Eléments propres de A

2.1. Que savez vous sur les valeurs propres et les sous espaces propres de A ?

2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe une suite finie (u_p), $0 \le p \le n+1$ de complexes telle que

$$\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 & (1) \\ \exists j \in [1,n] \; u_j \neq 0 & (2) \\ \forall p \in [1,n] \; u_{p+1} + (\lambda - 2)u_p + u_{p-1} = 0 & (3) \end{cases}$$

2.3. On recherche donc une suite $(u_p)\ p \in \mathbb{N}$ de complexes vérifiant (1), (2) et (3') avec (3') : $\forall p \in \mathbb{N}, u_{p+1} + (\lambda - 2)u_p + u_{p-1} = 0$.

On appelle r_1 et r_2 les racines de $r^2 + (\lambda - 2)\, r + 1 = 0$.

a. Montrer que si $r_1 = r_2$, on aboutit à une contradiction.

b. On suppose que $r_1 \neq r_2$. Montrer alors que $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$, puis qu'il existe $p \in [1, n]$

tel que $r_1 = e^{i\frac{\pi p}{n+1}}$ et $r_2 = e^{-i\frac{p\pi}{n+1}}$

En déduire que les valeurs propres de A sont les réels

$\lambda_p = 4 \sin^2 \frac{\pi p}{2(n+1)}$, $1 \leq p \leq n$, associées aux vecteurs propres $v^{(p)} = \begin{bmatrix} \sin\frac{p\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2p\pi}{n+1} \\ \ldots\ldots \\ \sin\frac{np\pi}{n+1} \end{bmatrix}$.

3. Diagonalisation de A

3.1. Soit $\theta = \frac{2p\pi}{n+1}$. Montrer que $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \ldots + e^{in\theta} = 0$.

3.2. En déduire que $\left\|v^{(p)}\right\|_2 = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

3.3. Trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ d'ordre n telles que $P^{-1} A P = \Delta$.

3.4. Retrouver, à l'aide de cette factorisation qui donne $A = P\Delta P^{-1}$, le fait que $(X, Y) \mapsto {}^tY AX$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (propriété établie à la question **I.1.**).

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

On décompose la matrice A sous la forme $A = D - E - F$ avec $D = 2I_n$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = {}^tF.$$

Le système linéaire $AX = B$ peut s'écrire $(D - E)X = FX + B$ ou $DX = (E + F)X + B$.
On construit deux suites de vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $X^{(k)}$ et $Z^{(k)}$ définies par

$X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $(D - E)X^{(k+1)} = FX^{(k)} + B$ (4)

$Z^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $DZ^{(k+1)} = (E + F)Z^{(k)} + B$ (5)

On prend le cas particulier $n = 3$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X^{(0)} = Z^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $X^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}$, $Z^{(k)} = \begin{bmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \\ z_3^{(k)} \end{bmatrix}$.

1. Reproduire et compléter les deux tableaux suivants :

$Z^{(0)}$	$Z^{(1)}$	$Z^{(2)}$	$Z^{(3)}$	$Z^{(4)}$
4				
4				
4				

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$
4				
4				
4				

2. Pour $k \geq 2$, calculer $X^{(k)}$ en fonction de $\frac{1}{2^k}$ puis calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} X^{(k)}$.

3. Montrer que $z_1^{(k+2)} - \frac{1}{2} z_1^{(k)} = \frac{3}{2}$. En déduire $z_1^{(k)}$ en fonction de k, puis $Z^{(k)}$ (On pourra se servir du point 4 rappelé au début).
Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} Z^{(k)}$.

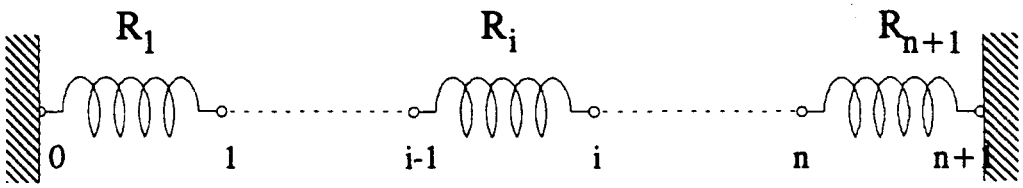
4. Que peut-on dire des limites obtenues aux deux questions précédentes vis à vis du système $AX = B$?

5. Soit $u = A^{-1} B$. Déterminer des entiers p et q tels que
$\|X^{(p)} - u\|_\infty < 10^{-3}$ et $\|Z^{(q)} - u\|_\infty < 10^{-3}$.
Quelle conclusion tirez vous de cette comparaison ?

PARTIE III

Etude de stabilité.

En fait la matrice A provient du problème de statique suivant:
Soit (n+1) ressorts de même longueur L, de même constante de raideur k, reliés entre eux comme le montre la figure suivante:



Les points extrêmes 0 et n+1 sont fixes. Les noeuds indexés de 1 à n sont initialement en position d'équilibre (également répartis entre les deux points fixes). On suppose qu'en plus chaque noeud i est soumis à une force d'intensité f_i dirigée suivant l'axe des ressorts. Les ressorts ont alors une nouvelle position d'équilibre décrite par les déplacements u_i des noeuds i par rapport à leur position initiale et mesurée algébriquement sur l'axe.
L'équation d'équilibre au noeud i s'écrit : $-\frac{k}{L}(u_i - u_{i-1}) + \frac{k}{L}(u_{i+1} - u_i) + f_i = 0$ *pour i de 1 à n avec les conditions aux bords* $u_0 = u_{n+1} = 0$.
On obtient donc le système linéaire AU = (L/k)f dont le second membre B est proportionnel à f.

On rappelle qu'étant donné un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ on définit une norme appelée norme infinie par $\|X\|_\infty = \sup(|x_1|, \ldots\ldots, |x_n|)$.

On suppose que n est pair.

1. Vérifier que $AX_1 = B_1$ et $AX_2 = B_2$ pour les données suivantes:

Tournez la page S.V.P.

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ 2(n-1) \\ 3(n-2) \\ \ldots\ldots \\ j(n-j+1) \\ \ldots. \\ \\ .. \\ n \end{pmatrix} \quad X_2 = \frac{1}{2(n+1)}\begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n-2 \\ -4 \\ \ldots\ldots \\ -2q \\ n-2q \\ \ldots\ldots \\ -n \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ .. \\ \\ \\ . \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour le premier système, dans quel sens se déplacent les noeuds ? Quels sont les noeuds qui ont le plus grand déplacement ?

2. Soit $r > 0$. On étudie les systèmes suivants:

$AX = B_3 = B_1 + rB_2$ de solution $X_3 = X_1 + rX_2$ (perturbation du premier système)
$AX = B_4 = B_2 + rB_1$ de solution $X_4 = X_2 + rX_1$ (perturbation du second système).

2.1. Calculer :

$$e(X_3) = \frac{\|X_3 - X_1\|_\infty}{\|X_1\|_\infty}, e(X_4) = \frac{\|X_4 - X_2\|_\infty}{\|X_2\|_\infty}, e(B_3) = \frac{\|B_3 - B_1\|_\infty}{\|B_1\|_\infty}, e(B_4) = \frac{\|B_4 - B_2\|_\infty}{\|B_2\|_\infty}.$$

2.2. Comparer les facteurs d'amplification d'erreur :

$$\frac{e(X_3)}{e(B_3)} \quad et \quad \frac{e(X_4)}{e(B_4)}.$$

2.3. Expliquer pourquoi la solution du premier système est stable alors que celle du deuxième est instable. Cela vous paraît - il conforme au bon sens "physique"?

Fin de l'énoncé